CHAP3 : Fonction d'une variable réelle .

Siham Ezzouak

FST SETTAT

29 octobre 2015

Les axes principaux de ce cours sont :

- Limites et continuité
- Dérivabilité
- Théorème de Rolle
- Théorème des accroissements finis.

Rappel

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction

- E s'appelle l'ensemble de départ de la fonction et F est son ensemble d'arrivée.

Rappel

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction

- E s'appelle l'ensemble de départ de la fonction et F est son ensemble d'arrivée.
- Si $f(x) = y$, on dit que y est l'image de x par la fonction f et que x est l'antécédent de y par f.

Rappel

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction

- E s'appelle l'ensemble de départ de la fonction et F est son ensemble d'arrivée.
- Si $f(x) = y$, on dit que y est l'image de x par la fonction f et que x est l'antécédent de y par f.
- Si $E = \mathbb{R}$ on dit que f est une fonction d'une variable réelle, si de plus $F = \mathbb{R}$ on dit que f est une fonction numérique d'une variable réelle.

Rappel

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction

- E s'appelle l'ensemble de départ de la fonction et F est son ensemble d'arrivée.
- Si $f(x) = y$, on dit que y est l'image de x par la fonction f et que x est l'antécédent de y par f.
- Si $E = \mathbb{R}$ on dit que f est une fonction d'une variable réelle, si de plus $F = \mathbb{R}$ on dit que f est une fonction numérique d'une variable réelle.
- l'ensemble de définition de f noté D_f est l'ensemble de tous les éléments de E qui ont une image dans F.



Rappel

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction

- E s'appelle l'ensemble de départ de la fonction et F est son ensemble d'arrivée.
- Si $f(x) = y$, on dit que y est l'image de x par la fonction f et que x est l'antécédent de y par f.
- Si $E = \mathbb{R}$ on dit que f est une fonction d'une variable réelle, si de plus $F = \mathbb{R}$ on dit que f est une fonction numérique d'une variable réelle.
- l'ensemble de définition de f noté D_f est l'ensemble de tous les éléments de E qui ont une image dans F.
- Si $D_f = E$, f est appelé une application.

Définition d'une fonction

Définition

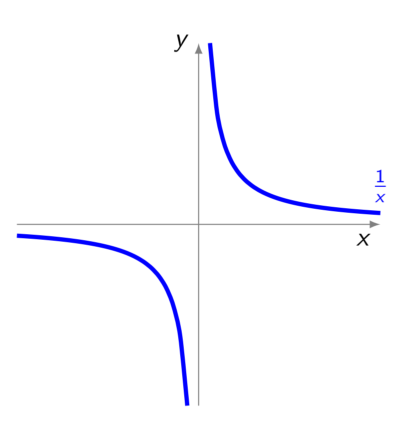
Une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles est une application $f : U \to \mathbb{R}$, où U est une partie de $\mathbb{R}$. En général, U est un intervalle ou une réunion d'intervalles. On appelle U le domaine de définition de la fonction f.

Exemple

$$f :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x}.$$

Définition d'une fonction

Le graphe d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est la partie Γ_f de $\mathbb{R}^2$ définie par $\Gamma_f = \left\{(x, f(x)) \mid x \in U\right\}$.



Opérations sur les fonctions

Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie U de $\mathbb{R}$. On peut alors définir les fonctions suivantes :

- la *somme* de f et g est la fonction $f + g : U \to \mathbb{R}$ définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout $x \in U$

Opérations sur les fonctions

Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie U de $\mathbb{R}$. On peut alors définir les fonctions suivantes :

- la *somme* de f et g est la fonction $f + g : U \to \mathbb{R}$ définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout $x \in U$
- le *produit* de f et g est la fonction $f \times g : U \to \mathbb{R}$ définie par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ pour tout $x \in U$

Opérations sur les fonctions

Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie U de $\mathbb{R}$. On peut alors définir les fonctions suivantes :

- la *somme* de f et g est la fonction $f + g : U \to \mathbb{R}$ définie par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout $x \in U$
- le *produit* de f et g est la fonction $f \times g : U \to \mathbb{R}$ définie par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ pour tout $x \in U$
- la *multiplication par un scalaire* $\lambda \in \mathbb{R}$ de f est la fonction $\lambda \cdot f : U \to \mathbb{R}$ définie par $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ pour tout $x \in U$.

Opérations sur les fonctions

$f+g$

$(f+g)(x)$

f

$g(x)$

g

$f(x)$

x



Parité

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire de la forme $]-a, a[$ ou $[-a, a]$ ou $\mathbb{R}$). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur cet intervalle. On dit que :

- *f est paire si $\forall x \in I \; f(-x) = f(x)$,*
- *f est impaire si $\forall x \in I \; f(-x) = -f(x)$.*



Parité

Interprétation graphique :

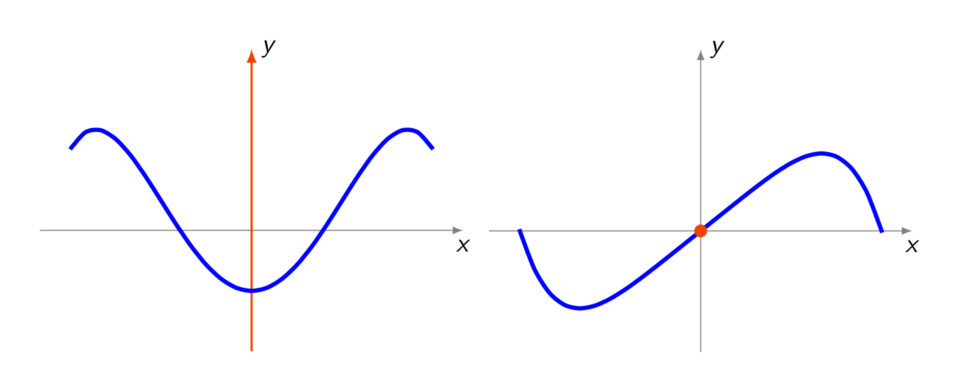
- f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Parité

Interprétation graphique :

- f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine.

Parité



Exemple

- *La fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $x \mapsto x^2$ *est paire.*
- *La fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $x \mapsto x^{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ *est impaire.*
- *La fonction* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est paire. La fonction* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est impaire.*

Parité

Remarque:

- *Toute application constante sur* I *est paire.*
- *Si* $0 \in I$ *et si* f *est impaire alors* $f(0) = 0$.
- $\forall\ f \in I$, *il existe deux uniques applications* g *paire et* h *impaire avec* $g \in I$ *et* $h \in I$ *telles que* $f = g + h$.

On a $\forall x \in I$

$$g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \text{ et } h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

Périodicité

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction et* T *un nombre réel,* $T > 0$*. La fonction* f *est dite périodique de période* T *ou* T*-périodique* $(T > 0)$ *si et seulement si*

$$\forall x \in I, \quad \begin{cases} x + T \in I \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}.$$

Périodicité

Exemple

1. *Les applications* sin *et* cos

Périodicité

Exemple

1. *Les applications* $\sin$ *et* $\cos$ *sont* 2π*-périodiques sur* $\mathbb{R}$*. L'application* $\tan$ *est*

Périodicité

Exemple

1. *Les applications* sin *et* cos *sont* 2π*-périodiques sur* $\mathbb{R}$. *L'application* tan *est* π*-périodique sur* $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. *L'application* $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - E(x) \end{array}$

Périodicité

Exemple

1. *Les applications* sin *et* cos *sont* 2π*-périodiques sur* $\mathbb{R}$. *L'application* tan *est* π*-périodique sur* $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. *L'application* $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - E(x) \end{array}$ *est* 1*-périodique.*

   Cet exemple de fonction est utilisée dans l'étude des séries de Fourier

Proposition

Soient $T > 0$ *et* A *une partie non vide de* $\mathbb{R}$ *tels que* $\forall x \in A, x + T \in A$.

Soient $f : A \to \mathbb{R}$, B *une partie non vide de* $\mathbb{R}$ *tels que* $f(A) \subset B$, $g : B \to \mathbb{R}$.

Si f *est* T*-périodique, alors* $g \circ f : \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$ *est aussi* T*-périodique.*

monotonie

Définition

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathbb{R}^A$.

- *f est dite croissante ssi*
  $\forall (x, y) \in A^2, \; x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$

monotonie

Définition

Soient A *une partie non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $f \in \mathbb{R}^A$.

- f *est dite croissante ssi* $\forall (x, y) \in A^2, \; x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- f *est dite décroissante ssi* $\forall (x, y) \in A^2, \; x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

monotonie

Définition

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathbb{R}^A$.

- *f est dite croissante ssi* $\forall (x, y) \in A^2,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- *f est dite décroissante ssi* $\forall (x, y) \in A^2,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
- *f est dite strictement croissante ssi* $\forall (x, y) \in A^2,\ x \leq y \Rightarrow f(x) < f(y)$.



monotonie

Définition

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathbb{R}^A$.

- *f est dite croissante ssi* $\forall (x, y) \in A^2,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- *f est dite décroissante ssi* $\forall (x, y) \in A^2,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
- *f est dite strictement croissante ssi* $\forall (x, y) \in A^2,\ x \leq y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- *f est dite strictement décroissante ssi* $\forall (x, y) \in A^2,\ x \leq y \Rightarrow f(x) > f(y)$.



monotonie

Définition

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathbb{R}^A$.

- *f est dite monotone ssi f est croissante ou f est décroissante.*

monotonie

Définition

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathbb{R}^A$.

- *f est dite monotone ssi f est croissante ou f est décroissante.*
- *f est dite strictement monotone ssi f est strictement croissante ou f est strictement décroissante.*

monotonie

$f(y)$

$f(x)$

x y

monotonie

Exemple

- *La fonction racine carrée* $\begin{cases} [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{cases}$

monotonie

Exemple

- *La fonction racine carrée* $\begin{cases} [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{cases}$ *est strictement croissante.*
- *La fonction exponentielle* exp : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

monotonie

Exemple

- *La fonction racine carrée* $\begin{cases} [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{cases}$ *est strictement croissante.*
- *La fonction exponentielle* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est strictement croissante.*
- *La fonction valeur absolue* $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{cases}$

monotonie

Exemple

- *La fonction racine carrée* $\begin{cases} [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{cases}$ *est strictement croissante.*
- *La fonction exponentielle* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est strictement croissante.*
- *La fonction valeur absolue* $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{cases}$ *n'est ni croissante, ni décroissante. Par contre, la fonction* $\begin{cases} [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{cases}$

monotonie

Exemple

- *La fonction racine carrée* $\begin{cases} [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{cases}$ *est strictement croissante.*
- *La fonction exponentielle* exp : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est strictement croissante.*
- *La fonction valeur absolue* $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{cases}$ *n'est ni croissante, ni décroissante. Par contre, la fonction* $\begin{cases} [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{cases}$ *est strictement croissante.*

Proposition

- $f, g : A \to \mathbb{R}$ *sont croissantes (resp. décroissantes), alors* $f + g$ *est*



Proposition

- *$f, g : A \to \mathbb{R}$ sont croissantes (resp. décroissantes), alors $f + g$ est croissante (resp. décroissantes).*

Proposition

- *$f, g : A \to \mathbb{R}$ sont croissantes (resp. décroissantes), alors $f + g$ est croissante (resp. décroissantes).*
- *Si $f, g : A \to \mathbb{R}$ sont croissantes (resp. décroissantes) et positives, alors fg*

Proposition

- *$f, g : A \to \mathbb{R}$ sont croissantes (resp. décroissantes), alors $f + g$ est croissante (resp. décroissantes).*
- *Si $f, g : A \to \mathbb{R}$ sont croissantes (resp. décroissantes) et positives, alors fg est croissante (resp. décroissante).*

Proposition

- *$f, g : A \to \mathbb{R}$ sont croissantes (resp. décroissantes), alors $f + g$ est croissante (resp. décroissantes).*
- *Si $f, g : A \to \mathbb{R}$ sont croissantes (resp. décroissantes) et positives, alors fg est croissante (resp. décroissante).*
- *Si $f : A \to \mathbb{R}$ sont croissante (resp. décroissante) et si $\lambda \in \mathbb{R}^+$, alors λf est*

Proposition

- *$f, g : A \to \mathbb{R}$ sont croissantes (resp. décroissantes), alors $f + g$ est croissante (resp. décroissantes).*
- *Si $f, g : A \to \mathbb{R}$ sont croissantes (resp. décroissantes) et positives, alors fg est croissante (resp. décroissante).*
- *Si $f : A \to \mathbb{R}$ sont croissante (resp. décroissante) et si $\lambda \in \mathbb{R}^+$, alors λf est croissante (resp. décroissante).*

Proposition

- *Si* $f : A \to \mathbb{R}$ *sont croissante (resp. décroissante), alors*

Proposition

- *Si* $f : A \to \mathbb{R}$ *sont croissante (resp. décroissante), alors* $-f : A \to \mathbb{R}$*, et* $\overset{\vee}{f} : \begin{array}{ccc} \overset{\vee}{A} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(-x) \end{array}$ *(où* $\overset{\vee}{A} = \{x \in A \ / \ -x \in A\}$*) sont*

Proposition

- *Si* $f : A \to \mathbb{R}$ *sont croissante (resp. décroissante), alors* $-f : A \to \mathbb{R}$, *et* $\overset{\vee}{f}: \begin{array}{ccc} \overset{\vee}{A} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(-x) \end{array}$ *(où* $\overset{\vee}{A} = \{x \in A \;/\; -x \in A\}$*) sont décroissantes (resp. croissantes).*
- *Si* $f : A \to \mathbb{R}$ *et* $g : B \to \mathbb{R}$ *sont toutes les deux croissantes ou toutes les deux décroissantes (resp. l'une est croissante et l'autre est décroissante), et si* $f(A) \subset B$, *alors l'application composée* $\begin{array}{l} A \to \mathbb{R} \\ x \mapsto g(f(x)) \end{array}$ *est*



Proposition

- *Si* $f : A \to \mathbb{R}$ *sont croissante (resp. décroissante), alors* $-f : A \to \mathbb{R}$*, et* $\overset{\vee}{f} : \begin{array}{ccc} \overset{\vee}{A} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(-x) \end{array}$ *(où* $\overset{\vee}{A} = \{x \in A \ / \ -x \in A\}$*) sont décroissantes (resp. croissantes).*
- *Si* $f : A \to \mathbb{R}$ *et* $g : B \to \mathbb{R}$ *sont toutes les deux croissantes ou toutes les deux décroissantes (resp. l'une est croissante et l'autre est décroissante), et si* $f(A) \subset B$*, alors l'application composée* $\begin{array}{l} A \to \mathbb{R} \\ x \mapsto g(f(x)) \end{array}$ *est croissante (resp. décroissante).*

Applications majorées, minorées, bornées

Définition

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ *une fonction. On dit que :*

Applications majorées, minorées, bornées

Définition

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ *une fonction. On dit que :*

- f *est majorée sur* U *si*

Applications majorées, minorées, bornées

Définition

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ *une fonction. On dit que :*

- f *est majorée sur* U *si* $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in U\ f(x) \leq M$ *;*

Applications majorées, minorées, bornées

Définition

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ *une fonction. On dit que :*

- f *est majorée sur* U *si* $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in U\ f(x) \leq M$;
- f *est minorée sur* U *si*

Applications majorées, minorées, bornées

Définition

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ *une fonction. On dit que :*

- f *est majorée sur* U *si* $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in U\ f(x) \leq M$;
- f *est minorée sur* U *si* $\exists m \in \mathbb{R}\ \forall x \in U\ f(x) \geq m$;

Applications majorées, minorées, bornées

Définition

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ *une fonction. On dit que :*

- f *est majorée sur* U *si* $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in U\ f(x) \leq M$;
- f *est minorée sur* U *si* $\exists m \in \mathbb{R}\ \forall x \in U\ f(x) \geq m$;
- f *est bornée sur* U *si* f *est à la fois majorée et minorée sur* U,

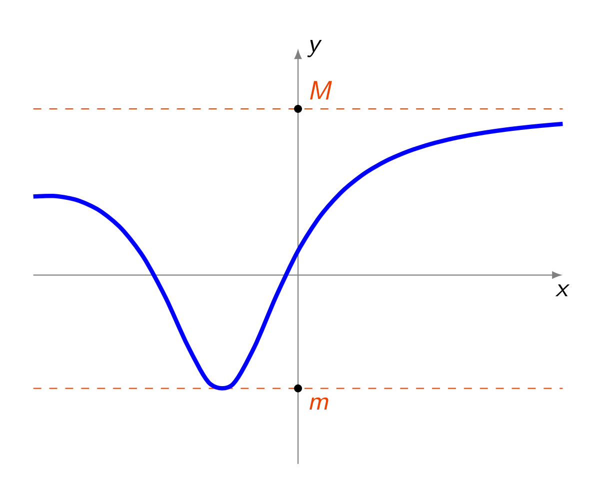
Applications majorées, minorées, bornées

Définition

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ *une fonction. On dit que :*

- f *est majorée sur* U *si* $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in U\ f(x) \leq M$;
- f *est minorée sur* U *si* $\exists m \in \mathbb{R}\ \forall x \in U\ f(x) \geq m$;
- f *est bornée sur* U *si* f *est à la fois majorée et minorée sur* U*,c'est-à-dire si* $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in U\ |f(x)| \leq M$.

Applications majorées, minorées, bornées



Applications majorées, minorées, bornées

Proposition

Si $f : U \to \mathbb{R}$ est majorée (resp. minorée), alors $f(U)$ admet une borne supérieure (resp. inférieure) dans $\mathbb{R}$, appelée borne supérieure (resp. inférieure) de f et notée $\sup\limits_{x\in U} f(x)$ (resp. $\inf\limits_{x\in U} f(x)$), ou $\sup\limits_{U} f$ (resp. $\inf\limits_{U} f$). Par définition, on note :

$$\sup_{x\in U} f(x) = \sup\{f(x) \ / x \in U\} = \sup f(U)$$

*. De même pour l'*inf.

Applications majorées, minorées, bornées

Théorème

Soient f *et* g *deux applications de* $U \to \mathbb{R}$.

Applications majorées, minorées, bornées

Théorème

Soient f *et* g *deux applications de* $U \to \mathbb{R}$.

- *Si* f *et* g *sont majorées, alors* $f + g$ *est majorée et, on a :*

$$\sup_{x\in U}(f+g)(x) \leq \sup_{x\in U} f(x) + \sup_{x\in U} g(x).$$

Applications majorées, minorées, bornées

Théorème

Soient f et g deux applications de $U \to \mathbb{R}$.

- *Si f et g sont majorées, alors $f+g$ est majorée et, on a :*

$$\sup_{x\in U}(f+g)(x) \leq \sup_{x\in U} f(x) + \sup_{x\in U} g(x).$$

- *Si f et g sont majorées et positives, alors fg est majorée et, on a :*

$$\sup_{x\in U}(fg)(x) \leq \left(\sup_{x\in U} f(x)\right)\left(\sup_{x\in U} g(x)\right).$$

Applications majorées, minorées, bornées

Soient f *et* g *deux applications de* $U \to \mathbb{R}$.

Théorème

- *Si* f *sont majorée et* $\lambda \in \mathbb{R}_+$, *alors* λf *est majorée et, on a :* $\sup_{x \in U} (\lambda f)(x) = \lambda \sup_{x \in U} f(x)$.

Applications majorées, minorées, bornées

Soient f *et* g *deux applications de* $U \to \mathbb{R}$.

Théorème

- *Si* f *sont majorée et* $\lambda \in \mathbb{R}_+$, *alors* λf *est majorée et, on a :* $\sup\limits_{x\in U}(\lambda f)(x) = \lambda \sup\limits_{x\in U} f(x)$.
- *Si* f *soit minorée, il faut et il suffit que* $-f$ *soit majorée et on a dans ce cas :*

$$\inf_{x\in U} f(x) = -\sup_{x\in U}(-f(x))$$

On désigne par I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I.

Définitions

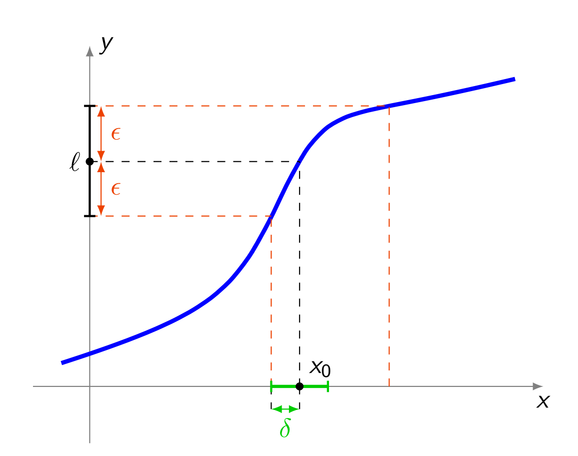
Définition

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en x_0 si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

On dit aussi que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0. On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou bien $\lim_{x_0} f = \ell$.

Définitions



Définitions

Remarque:

- *L'inégalité* $|x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.
  L'inégalité $|f(x) - \ell| < \epsilon \Leftrightarrow f(x) \in]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$.

Définitions

Remarque:

- *L'inégalité* $|x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.
  L'inégalité $|f(x) - \ell| < \epsilon \Leftrightarrow f(x) \in]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$.
- *On peut remplacer certaines inégalités strictes* « $<$ »*par des inégalités larges* « $\leq$ » *dans la définition :*
  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \epsilon$

Définitions

Remarque:

- *L'inégalité* $|x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.
  L'inégalité $|f(x) - \ell| < \epsilon \Leftrightarrow f(x) \in]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$.
- *On peut remplacer certaines inégalités strictes* « $<$ »*par des inégalités larges* « $\leq$ » *dans la définition :*
  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \epsilon$
- *L'ordre des quantificateurs est important, on ne peut échanger le* $\forall \epsilon$ *avec le* $\exists \delta$*, on peut écrire :*
  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 \ldots$

Définitions

Proposition

Si $f(x)$ *possède une limite quand* $x \to x_0$ *alors cette limite est unique.*

Limite à droite

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]x_0, x_0 + \delta[$, $(\delta > 0)$. *On dit que f admet* ℓ *à droite en* x_0 *si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

et on la note $\lim\limits_{x_0^+} f$ *ou* $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$



Limite à gauche

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]x_0 - \delta, x_0[$ *, (*$\delta > 0$ *). On dit que f admet* ℓ *à gauche en* x_0 *si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

et on la note $\lim\limits_{x_0^-} f$ *ou* $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$



Limite à gauche et à droite

Proposition

- $Si \lim_{x_0^-} f(x) = \lim_{x_0^+} f(x) = \ell \; alors$

Limite à gauche et à droite

Proposition

- $Si \lim_{x_0^-} f(x) = \lim_{x_0^+} f(x) = \ell \ alors$



Limite à gauche et à droite

Proposition

- *Si* $\lim_{x_0^-} f(x) = \lim_{x_0^+} f(x) = \ell$ *alors* $\lim_{x_0} f(x) = \ell$.
- *Si l'une des limites* $\lim_{x_0^-} f(x)$ *ou* $\lim_{x_0^+} f(x)$ *n'existe pas ou s'elles existent mais elles sont différentes alors*

Limite à gauche et à droite

Proposition

- *Si* $\lim\limits_{x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x_0^+} f(x) = \ell$ *alors* $\lim_{x_0} f(x) = \ell$.
- *Si l'une des limites* $\lim_{x_0^-} f(x)$ *ou* $\lim_{x_0^+} f(x)$ *n'existe pas ou s'elles existent mais elles sont différentes alors*

Limite à gauche et à droite

Proposition

- *Si* $\lim\limits_{x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x_0^+} f(x) = \ell$ *alors* $\lim_{x_0} f(x) = \ell$.
- *Si l'une des limites* $\lim_{x_0^-} f(x)$ *ou* $\lim_{x_0^+} f(x)$ *n'existe pas ou s'elles existent mais elles sont différentes alors* $\lim_{x_0} f(x)$ *n'existe pas.*

Limite à gauche et à droite

Exemple

Considérons la fonction partie entière au point $x = 2$:

- *Si* $x \in]2, 3[$ *on a* $E(x) = 2$, *on a* $\lim\limits_{2^+} E = 2$.

Limite à gauche et à droite

Exemple

Considérons la fonction partie entière au point $x = 2$ *:*

- *Si* $x \in]2,3[$ *on a* $E(x) = 2$*, on a* $\lim\limits_{2^+} E = 2$.
- *Si* $x \in [1,2[$ *on a* $E(x) = 1$*, on a* $\lim\limits_{2^-} E = 1$.



Limite à gauche et à droite

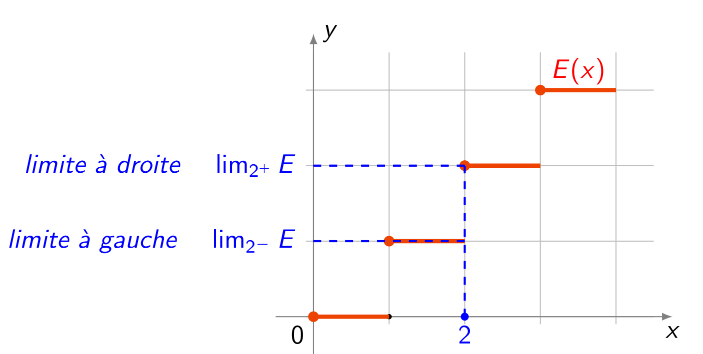
Exemple

Considérons la fonction partie entière au point $x = 2$:

- *Si* $x \in]2, 3[$ *on a* $E(x) = 2$, *on a* $\lim\limits_{2^+} E = 2$.
- *Si* $x \in [1, 2[$ *on a* $E(x) = 1$, *on a* $\lim\limits_{2^-} E = 1$.
- *On a* $\lim_{2^+} E \neq \lim_{2^-} E$, *on en déduit que* E *n'a pas de limite en* 2.

Limite à gauche et à droite

Exemple



Limites en $+\infty$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $I =]a, +\infty[$.

Définition

- *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ si*

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists B > 0 \, \forall x \in I \quad x > B \implies |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ *ou* $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$.

Limites en $+\infty$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $I =]a, +\infty[$.

Définition

- *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ si*

  $$\forall \epsilon > 0 \, \exists B > 0 \, \forall x \in I \quad x > B \implies |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

  On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ *ou* $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$.
- *On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si*

  $$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies f(x) > A.$$

  On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

Limites en $+\infty$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $I =]a, +\infty[$.

Définition

- *On dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si*

  $$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies f(x) < -A.$$

  On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ *ou* $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty.$

Limites en $-\infty$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]-\infty, a[$.

Définition

- *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en $-\infty$ si*

$$\forall \epsilon > 0\, \exists B > 0\, \forall x \in I \quad x < -B \implies |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ *ou* $\lim\limits_{-\infty} f = \ell$.

Limites en $-\infty$

Définition

- *On dit que f a pour limite* $+\infty$ *en* $-\infty$ *si*

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x < -B \implies f(x) > A.$$

On note alors $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim_{-\infty} f = +\infty$



Limites en $-\infty$

Définition

- *On dit que f a pour limite* $+\infty$ *en* $-\infty$ *si*

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x < -B \implies f(x) > A.$$

On note alors $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim_{-\infty} f = +\infty$

- *On dit que f a pour limite* $-\infty$ *en* $-\infty$ *si*

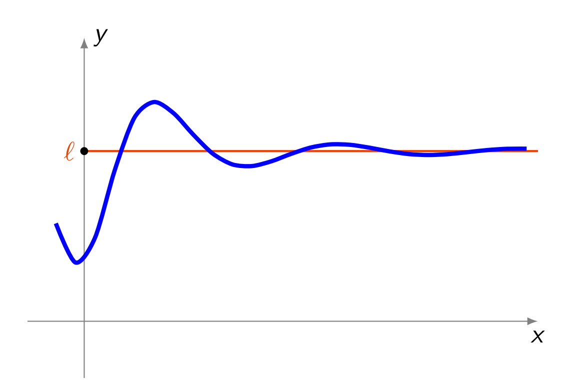
$$\forall A > 0 \, \exists B > 0 \, \forall x \in I \quad x < -B \implies f(x) < -A.$$

On note alors $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ *ou* $\lim_{-\infty} f = -\infty.$

Limites infinies

Exemple

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$



Limites infinies

Définition

- *Soit* $x_0 \in \mathbb{R}$. *On dit que* f *a pour limite* $+\infty$ *en* x_0 *si*

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$.

Limites infinies

Définition

- *Soit* $x_0 \in \mathbb{R}$. *On dit que f a pour limite* $+\infty$ *en* x_0 *si*

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A.$$

On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim_{x_0} f = +\infty$.

- *Soit* $x_0 \in \mathbb{R}$. *On dit que f a pour limite* $-\infty$ *en* x_0 *si*

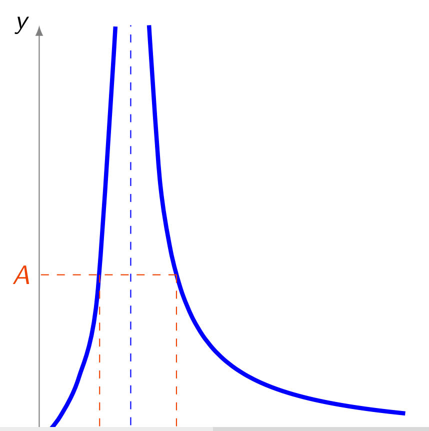
$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) < -A.$$

On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ *ou* $\lim_{x_0} f = -\infty$.

Limites infinies

Exemple

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$



Proposition

Si $\lim\limits_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ *et* $\lim\limits_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, *alors :*

- $\lim\limits_{x_0}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \ell$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x_0}(f + g) = \ell + \ell'$
- $\lim\limits_{x_0}(f \times g) = \ell \times \ell'$
- *si* $\ell \neq 0$, *alors* $\lim\limits_{x_0} \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{\ell}$

De plus, si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ *(ou* $-\infty$*) alors* $\lim\limits_{x_0} \dfrac{1}{f} = 0$.

Proposition

Si $\lim_{x_0} f = \ell$ *et* $\lim_{\ell} g = \ell'$ *alors* $\lim_{x_0} g \circ f = \ell'$

Proposition

Si $\lim_{x_0} f = \ell$ *et* $\lim_{\ell} g = \ell'$ *alors* $\lim_{x_0} g \circ f = \ell'$

Exemple

Soit f *une fonction telle que* $f(x) \to 2$ *lorsque* $x \to x_0 \in \mathbb{R}$



Proposition

Si $\lim_{x_0} f = \ell$ *et* $\lim_{\ell} g = \ell'$ *alors* $\lim_{x_0} g \circ f = \ell'$

Exemple

Soit f *une fonction telle que* $f(x) \to 2$ *lorsque* $x \to x_0 \in \mathbb{R}$

Posons $g(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{f(x)^2} + \ln f(x)}$

Proposition

Si $\lim_{x_0} f = \ell$ *et* $\lim_{\ell} g = \ell'$ *alors* $\lim_{x_0} g \circ f = \ell'$

Exemple

Soit f une fonction telle que $f(x) \to 2$ *lorsque*
$x \to x_0 \in \mathbb{R}$
Posons $g(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{f(x)^2} + \ln f(x)}$
Si elle existe, quelle est la limite de g en x_0 *?*

Exemple

- *lorsque* $x \to x_0$:
  $f(x) \to 2 \implies f(x)^2 \to 4$

Exemple

- *lorsque* $x \to x_0$:
  $f(x) \to 2 \implies f(x)^2 \to 4 \implies \frac{1}{f(x)^2} \to \frac{1}{4}$

Exemple

- *lorsque* $x \to x_0$ *:*
  $f(x) \to 2 \implies f(x)^2 \to 4 \implies \frac{1}{f(x)^2} \to \frac{1}{4}$
- *comme* $f(x) \to 2 > 0$ *alors* $f(x) > 0$ *dans un voisinage de* x_0,

Exemple

- *lorsque* $x \to x_0$ *:*
  $f(x) \to 2 \implies f(x)^2 \to 4 \implies \frac{1}{f(x)^2} \to \frac{1}{4}$
- *comme* $f(x) \to 2 > 0$ *alors* $f(x) > 0$ *dans un voisinage de* x_0*, donc* $\ln f(x)$ *est bien définie dans ce voisinage et* $\ln f(x) \to \ln 2$

Exemple

- *lorsque* $x \to x_0$ *:*
  $f(x) \to 2 \implies f(x)^2 \to 4 \implies \frac{1}{f(x)^2} \to \frac{1}{4}$
- *comme* $f(x) \to 2 > 0$ *alors* $f(x) > 0$ *dans un voisinage de* x_0, *donc* $\ln f(x)$ *est bien définie dans ce voisinage et* $\ln f(x) \to \ln 2$
- *Donc* $1 + \frac{1}{f(x)^2} + \ln f(x) \to 1 + \frac{1}{4} + \ln 2 > 0$

Exemple

- *lorsque* $x \to x_0$ *:*
  $f(x) \to 2 \implies f(x)^2 \to 4 \implies \frac{1}{f(x)^2} \to \frac{1}{4}$
- *comme* $f(x) \to 2 > 0$ *alors* $f(x) > 0$ *dans un voisinage de* x_0*, donc* $\ln f(x)$ *est bien définie dans ce voisinage et* $\ln f(x) \to \ln 2$
- *Donc* $1 + \frac{1}{f(x)^2} + \ln f(x) \to 1 + \frac{1}{4} + \ln 2 > 0$
  donc $g(x)$ *est bien définie dans un voisinage de* x_0

Exemple

- *lorsque* $x \to x_0$ *:*
  $f(x) \to 2 \implies f(x)^2 \to 4 \implies \frac{1}{f(x)^2} \to \frac{1}{4}$
- *comme* $f(x) \to 2 > 0$ *alors* $f(x) > 0$ *dans un voisinage de* x_0*, donc* $\ln f(x)$ *est bien définie dans ce voisinage et* $\ln f(x) \to \ln 2$
- *Donc* $1 + \frac{1}{f(x)^2} + \ln f(x) \to 1 + \frac{1}{4} + \ln 2 > 0$
  donc $g(x)$ *est bien définie dans un voisinage de* x_0
- *Par composition* $\lim_{x \to x_0} g(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \ln 2}$

Formes indeterminées

- $\lim_a f(x) = +\infty$ et $\lim_a g(x) = -\infty$, alors $f + g$ prend la forme indéterminée $+\infty - \infty$.



Formes indeterminées

- $\lim_a f(x) = +\infty$ et $\lim_a g(x) = -\infty$, alors $f + g$ prend la forme indéterminée $+\infty - \infty$.
- $\lim_a f(x) = \pm\infty$ et $\lim_a g(x) = 0$, alors fg prend la forme indéterminée $\pm\infty \times 0$.

Formes indeterminées

- $\lim_a f(x) = +\infty$ et $\lim_a g(x) = -\infty$, alors $f + g$ prend la forme indéterminée $+\infty - \infty$.
- $\lim_a f(x) = \pm\infty$ et $\lim_a g(x) = 0$, alors fg prend la forme indéterminée $\pm\infty \times 0$.
- $\lim_a f(x) = \pm\infty$ et $\lim_a g(x) = \pm\infty$, alors $\frac{f}{g}$ prend la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

Formes indeterminées

- $\lim_a f(x) = +\infty$ et $\lim_a g(x) = -\infty$, alors $f+g$ prend la forme indéterminée $+\infty - \infty$.
- $\lim_a f(x) = \pm\infty$ et $\lim_a g(x) = 0$, alors fg prend la forme indéterminée $\pm\infty \times 0$.
- $\lim_a f(x) = \pm\infty$ et $\lim_a g(x) = \pm\infty$, alors$\frac{f}{g}$ prend la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.
- $\lim_a f(x) = 0$ et $\lim_a g(x) = 0$, alors$\frac{f}{g}$ prend la forme indéterminée$\frac{0}{0}$..



Formes indeterminées

- $\lim_a f(x) = +\infty$ et $\lim_a g(x) = -\infty$, alors $f + g$ prend la forme indéterminée $+\infty - \infty$.
- $\lim_a f(x) = \pm\infty$ et $\lim_a g(x) = 0$, alors fg prend la forme indéterminée $\pm\infty \times 0$.
- $\lim_a f(x) = \pm\infty$ et $\lim_a g(x) = \pm\infty$, alors $\frac{f}{g}$ prend la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.
- $\lim_a f(x) = 0$ et $\lim_a g(x) = 0$, alors $\frac{f}{g}$ prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$..
- De même 1^{∞} et ∞^{0} des formes indeterminées.

Limites et Inégalités

Proposition

- *Si* $f \leq g$ *et si* $\lim_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ *et* $\lim_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, *alors*

Limites et Inégalités

Proposition

- *Si* $f \leq g$ *et si* $\lim_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ *et* $\lim_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, *alors* $\ell \leq \ell'$

Limites et Inégalités

Proposition

- *Si* $f \leq g$ *et si* $\lim\limits_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ *et* $\lim\limits_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, *alors* $\ell \leq \ell'$
- *Si* $f \leq g$ *et si* $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$, *alors* $\lim\limits_{x_0} g =$



Limites et Inégalités

Proposition

- *Si* $f \leq g$ *et si* $\lim_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ *et* $\lim_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, *alors* $\ell \leq \ell'$
- *Si* $f \leq g$ *et si* $\lim_{x_0} f = +\infty$, *alors* $\lim_{x_0} g = +\infty$

Limites et Inégalités

Proposition

- *Si* $f \leq g$ *et si* $\lim\limits_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ *et* $\lim\limits_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, *alors* $\ell \leq \ell'$
- *Si* $f \leq g$ *et si* $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$, *alors* $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$
- *Théorème des gendarmes Si* $f \leq g \leq h$ *et si* $\lim\limits_{x_0} f = \lim\limits_{x_0} h = \ell \in \mathbb{R}$ *alors*



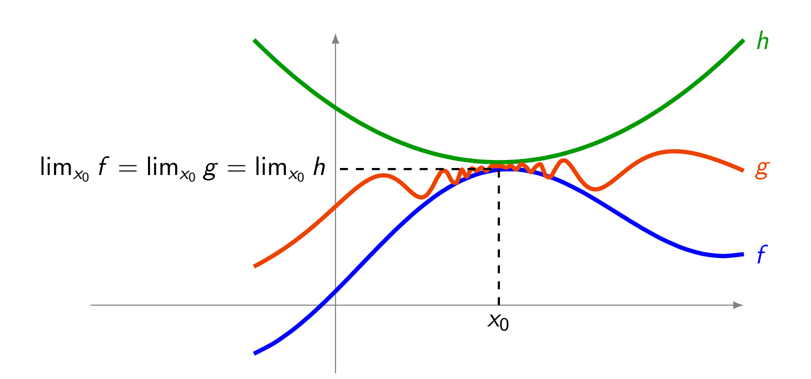
Limites et Inégalités

Proposition

- *Si* $f \leq g$ *et si* $\lim\limits_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ *et* $\lim\limits_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, *alors* $\ell \leq \ell'$
- *Si* $f \leq g$ *et si* $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$, *alors* $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$
- *Théorème des gendarmes Si* $f \leq g \leq h$ *et si* $\lim\limits_{x_0} f = \lim\limits_{x_0} h = \ell \in \mathbb{R}$ *alors* $\lim\limits_{x_0} g = \ell$



illustration du théorème des gendarmes pour les limites des fonctions



Limites des fonctions monotones

Théorème

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ *tel que* $a < b$ *et* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *une application croissante. alors*

- *Si f est majorée, alors f admet une limite finie en b et on a* $\lim_b f(x) = \sup\limits_{]a,b[} f(x)$
- *Si f n'est pas majorée, alors f admet* $+\infty$ *pour limite en b.*
- *Si f est minorée, alors f admet une limite finie en a et on a* $\lim_a f(x) = \inf\limits_{]a,b[} f(x)$.
- *Si f n'est pas minorée, alors f admet* $-\infty$ *en a.*

Exemple

La fonction partie entière E est croissante sur $\mathbb{R}$. Elle n'est ni majorée ni minorée puisque $E(a) = a$ pour tout entier relatif a. Par suite, $lim_{+\infty} E = +\infty$ et $lim_{-\infty} E = -\infty$.

Continuité des fonctions réelles

- Définitions



Continuité des fonctions réelles

- Définitions
- Opérations sur les fonctions continues

Continuité des fonctions réelles

- Définitions
- Opérations sur les fonctions continues
- Prolongement par continuité

Continuité des fonctions réelles

- Définitions
- Opérations sur les fonctions continues
- Prolongement par continuité
- Propriétes des fonctions continues

Continuité des fonctions réelles

- Définitions
- Opérations sur les fonctions continues
- Prolongement par continuité
- Propriétes des fonctions continues
- Fonctions strictement monotones

Continuité en un point

Définition

- *$f : I \to \mathbb{R}$ est continue en $x_0 \in I$ si*
  $\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in I \, |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
  c'est-à-dire si $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ lorsque x tend vers x_0, on note $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Continuité en un point

Définition

- $f : I \to \mathbb{R}$ *est continue en* $x_0 \in I$ *si*
  $\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in I \, |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
  c'est-à-dire si $f(x)$ *tend vers* $f(x_0)$ *lorsque* x *tend vers* x_0*, on note* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- *Si* f *n'est pas continue en* x_0*, elle sera dite discontinue en ce point.*

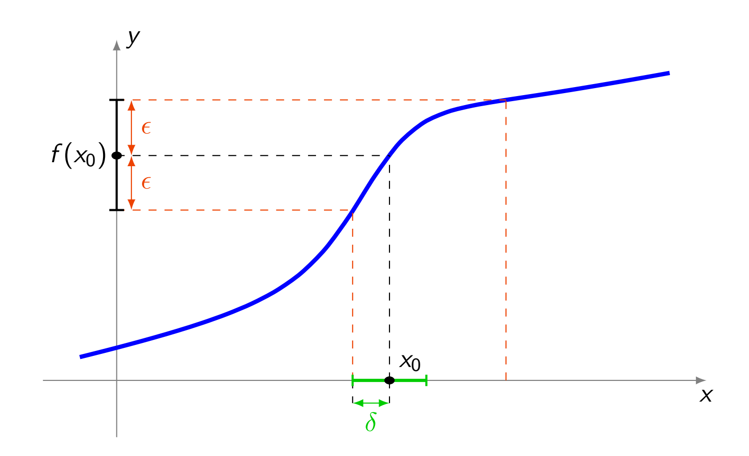
Continuité en un point

Définition

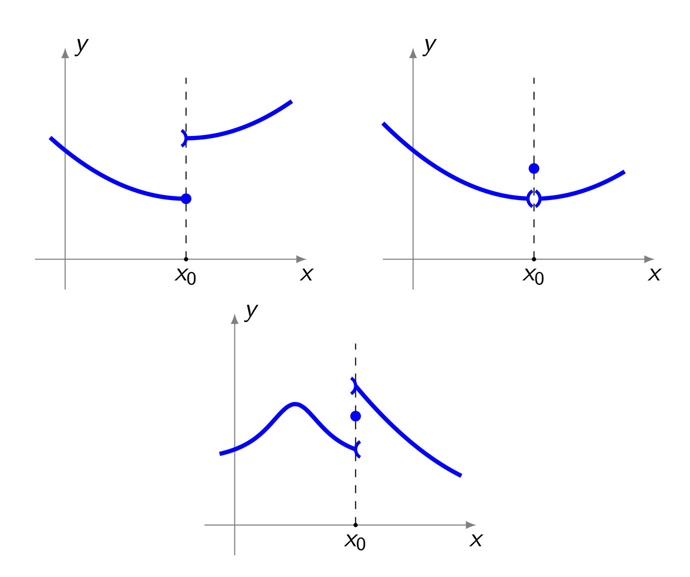
- *$f : I \to \mathbb{R}$ est continue en $x_0 \in I$ si* $\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in I\, |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ *c'est-à-dire si $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ lorsque x tend vers x_0, on note* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- *Si f n'est pas continue en x_0, elle sera dite discontinue en ce point.*
- *f est continue sur I si f est continue en tout point de I*



Continuité en un point



Les fonctions suivantes ne sont pas continues au point x_0



Exemple

- *Les fonctions suivantes sont continues :*
  - *fonction constante sur un intervalle*
  - $x \mapsto \sqrt{x}$ *sur* $[0, +\infty[$
  - $\sin$ *et* $\cos$ *sur* $\mathbb{R}$
  - $x \mapsto |x|$ *sur* $\mathbb{R}$



Exemple

- *Les fonctions suivantes sont continues :*
  - *fonction constante sur un intervalle*
  - $x \mapsto \sqrt{x}$ *sur* $[0, +\infty[$
  - $\sin$ *et* $\cos$ *sur* $\mathbb{R}$
  - $x \mapsto |x|$ *sur* $\mathbb{R}$
- E *n'est pas continue aux points* $x_0 \in \mathbb{Z}$
  Mais elle est continue en $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

Proposition

Soient f et g deux fonctions continues en $x_0 \in \mathbb{R}$.

Proposition

Soient f et g deux fonctions continues en $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors

- $\lambda \cdot f$ *est continue en* x_0 *(pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$*)*

Proposition

Soient f et g deux fonctions continues en $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors

- $\lambda \cdot f$ *est continue en* x_0 *(pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$*)*
- $f + g$ *est continue en* x_0

Proposition

Soient f et g deux fonctions continues en $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors

- $\lambda \cdot f$ *est continue en* x_0 *(pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$*)*
- $f + g$ *est continue en* x_0
- $f \times g$ *est continue en* x_0

Proposition

Soient f et g deux fonctions continues en $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors

- $\lambda \cdot f$ *est continue en* x_0 *(pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$*)*
- $f + g$ *est continue en* x_0
- $f \times g$ *est continue en* x_0
- $|f|$ *est continue en* x_0

Proposition

Soient f et g deux fonctions continues en $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors

- $\lambda \cdot f$ *est continue en* x_0 *(pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$*)*
- $f + g$ *est continue en* x_0
- $f \times g$ *est continue en* x_0
- $|f|$ *est continue en* x_0
- *si* $f(x_0) \neq 0$ *alors* $\frac{1}{f}$ *est continue en* x_0

Exemple

On en déduit que les fonctions suivantes sont continues

Exemple

On en déduit que les fonctions suivantes sont continues

- $x \mapsto x^n$ *sur* $\mathbb{R}$ *(comme produit* $x \cdot x \cdot \ldots$*)*

Exemple

On en déduit que les fonctions suivantes sont continues

- $x \mapsto x^n$ *sur* $\mathbb{R}$ *(comme produit* $x \cdot x \cdot \ldots$*)*
- *les polynômes sur* $\mathbb{R}$

Exemple

On en déduit que les fonctions suivantes sont continues

- $x \mapsto x^n$ *sur* $\mathbb{R}$ *(comme produit* $x \cdot x \cdot \ldots$*)*
- *les polynômes sur* $\mathbb{R}$
- *les fractions rationnelles* $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ *sur tout intervalle où* $Q(x) \neq 0$

Continuité de la fonction composée

Proposition

Si f est continue en x_0 et si g est continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0

Prolongement par continuité

Définition

Soit I *un intervalle,* x_0 *un point de* I *et* $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$.

- *On dit que* f *est prolongeable par continuité en* x_0 *si* f *admet une limite finie* l *en* x_0.

Prolongement par continuité

Définition

Soit I un intervalle, x_0 un point de I et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$.

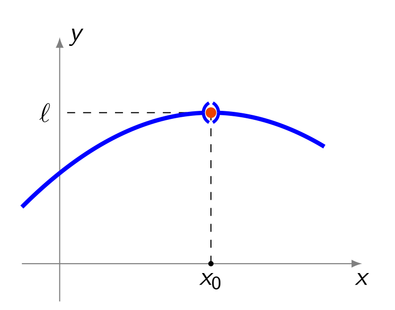
- *On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite finie l en x_0.*
- *On définit alors la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in I$*

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

La fonction g est appelée prolongement par continuité de f au point x_0.

Prolongement par continuité en x_0

Exemple



Exemple

La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *admet-elle un prolongement par continuité en* 0 *?*

Exemple

La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *admet-elle un prolongement par continuité en* 0 *?*

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad |f(x)| \leq |x|$$

Exemple

La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *admet-elle un prolongement par continuité en* 0 *?*

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad |f(x)| \leq |x| \implies \lim_{0} f = 0$$

Exemple

La fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *admet-elle un prolongement par continuité en* 0 *?*

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad |f(x)| \leq |x| \implies \lim_{0} f = 0$$

Donc f *est donc prolongeable par continuité en* 0 *et* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est*

$$g(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

Continuité à droite et à gauche de x_0

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in I$ et non un extrémité dans I

- *On dit que f est continue à droite de x_0 si* $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$.
- *On dit que f est continue à gauche de x_0 si* $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$.



Continuité à droite et à gauche de x_0

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction et* $x_0 \in I$ *et non un extrémité dans* I *. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- f *est continue en* x_0.
- f *est continue à droite et à gauche de* x_0

Continuité sur un intervalle

Définition

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ *une fonction réelle définie sur* $[a,\ b]$*. On dit que* f *est continue sur* $[a,\ b]$ *si :*

- f *est continue sur* $]a,\ b[$,

Continuité sur un intervalle

Définition

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction réelle définie sur* $[a, b]$*. On dit que* f *est continue sur* $[a, b]$ *si :*

- f *est continue sur* $]a, b[$,
- f *est continue à droite de* a *et à gauche de* b*.*

Continuité sur un intervalle

Définition

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ *et* f *une fonction réelle définie sur* $]a, b]$ *(resp* $[a, b[$*) . On dit que* f *est continue sur* $]a, b]$ *(resp* $[a, b[$*) si :*

- f *est continue sur* $]a, b[$,

Continuité sur un intervalle

Définition

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ *et* f *une fonction réelle définie sur* $]a, b]$ *(resp* $[a, b[$*) . On dit que* f *est continue sur* $]a, b]$ *(resp* $[a, b[$*) si :*

- f *est continue sur* $]a, b[$,
- f *est continue à droite de* a *(resp à gauche de* b*).*

Continuité sur un intervalle fermé borné

Théorème

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ *et* f *une fonction continue sur un intervalle fermé borné* $I = [a, b]$ *alors :*

- f *est bornée :* $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} |f(x)| \leq c$

Continuité sur un intervalle fermé borné

Théorème

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ *et* f *une fonction continue sur un intervalle fermé borné* $I = [a, b]$ *alors :*

- f *est bornée :* $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} |f(x)| \leq c$
- f *atteint ses bornes supérieure et inférieure.si :* $M = \sup_{x \in I}(f(x))$ *et* $m = \inf_{x \in I}(f(x))$ *alors* $\exists x_1 \in I$ *et* $\exists x_2 \in I$ *tel que* $M = f(x_1)$ *et* $m = f(x_2)$.

Continuité sur un intervalle fermé borné

Théorème

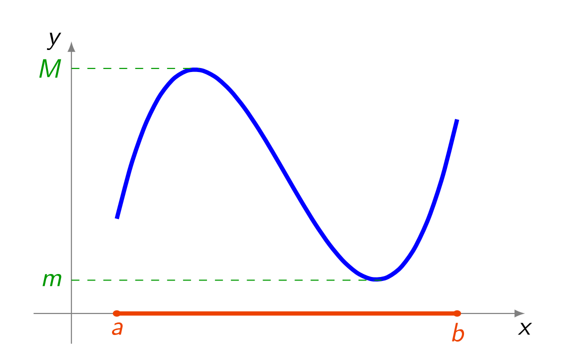
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ *et* f *une fonction continue sur un intervalle fermé borné* $I = [a, b]$ *alors :*

- f *est bornée :* $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} |f(x)| \leq c$
- f *atteint ses bornes supérieure et inférieure.si :* $M = \sup_{x \in I}(f(x))$ *et* $m = \inf_{x \in I}(f(x))$ *alors* $\exists x_1 \in I$ *et* $\exists x_2 \in I$ *tel que* $M = f(x_1)$ *et* $m = f(x_2)$.
- $f([a, b]) = [m, M]$ *(l'image par une fonction continue d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné)*



Continuité sur un intervalle fermé borné

Exemple



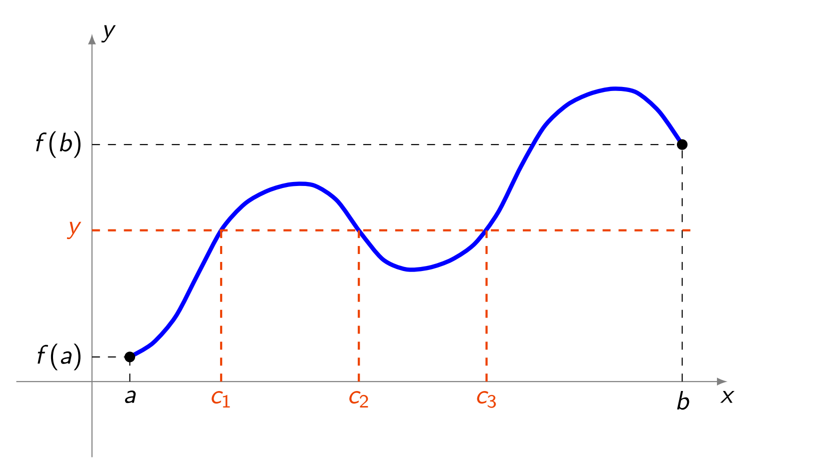
Continuité sur un intervalle fermé borné

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Continuité sur un intervalle fermé borné

Exemple



Application du théorème des valeurs intermédiaires

la version la plus utilisée du théorème des valeurs intermédiaires est la suivante.

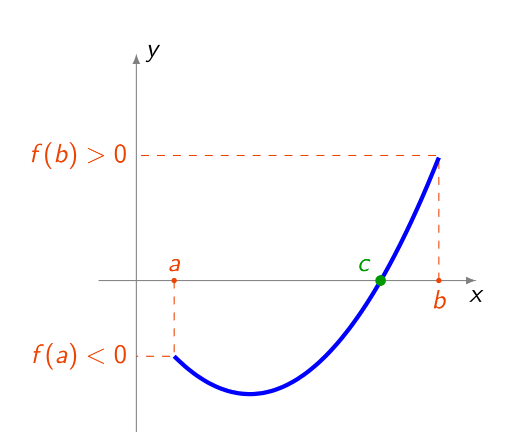
Corollaire

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur un intervalle fermé borné* $[a, b]$.
Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, *alors il existe* $c \in]a, b[$ *tel que* $f(c) = 0$.



Continuité sur un intervalle fermé borné

Exemple





Tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle

- $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ avec n un entier impair et $a_n > 0$



Tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle

- $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ avec n un entier impair et $a_n > 0$
- Alors $\lim\limits_{-\infty} P = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} P = +\infty$



Tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle

- $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ avec n un entier impair et $a_n > 0$
- Alors $\lim\limits_{-\infty} P = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} P = +\infty$
- Donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $P(a) < 0$ et $P(b) > 0$



Tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle

- $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ avec n un entier impair et $a_n > 0$
- Alors $\lim\limits_{-\infty} P = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} P = +\infty$
- Donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $P(a) < 0$ et $P(b) > 0$
- Par le TVI la fonction $x \mapsto P(x)$ s'annule en $c \in \mathbb{R}$.

Fonctions strictement monotones

Théorème (Théorème de la bijection)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors

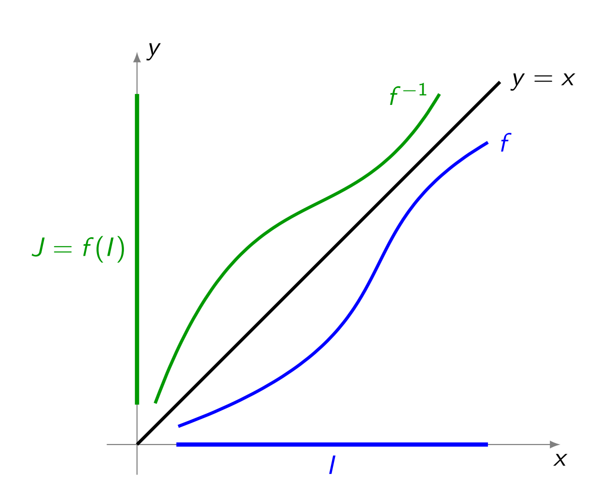
1. *f établit une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle image $J = f(I)$,*

Fonctions strictement monotones

Théorème (Théorème de la bijection)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors

1. *f établit une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle image $J = f(I)$,*
2. *la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f.*


y
$y = x$
f^{-1}
f
$J = f(I)$
I
x

Exemple

Soit $n \geq 1$. *Soit* $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ *définie par* $f(x) = x^n$. *Alors* f *est continue et strictement croissante. Comme* $\lim_{+\infty} f = +\infty$ *alors* f *est une bijection.*

Exemple

Soit $n \geq 1$. *Soit* $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ *définie par* $f(x) = x^n$. *Alors* f *est continue et strictement croissante. Comme* $\lim_{+\infty} f = +\infty$ *alors* f *est une bijection.Sa bijection réciproque* f^{-1} *est notée :* $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ *(ou aussi* $x \mapsto \sqrt[n]{x}$*) : c'est la fonction racine n-ième. Elle est continue et strictement croissante.*

Image d'une suite par une fonction

Théorème

On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in \bar{I}$. *Soit une suite* (u_n) *de points de* I *et* $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$. *On suppose que*

- $\lim_{n\to+\infty} u_n = x_0$.
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.



Démontrer qu'une fonction n'a pas de limite

Corollaire

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in \bar{I}$ *et* $\ell_1, \ell_2 \in \bar{\mathbb{R}}$. *On suppose qu'il existe deux suites* (u_n) *et* (v_n) *de points de* I *vérifiant :*

- $\lim_{n\to+\infty} u_n = x_0$, $\lim_{n\to+\infty} v_n = x_0$
- $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell_1$ *et* $\lim_{n\to+\infty} f(v_n) = \ell_2$.
- $\ell_1 \neq \ell_2$

alors f *n'admet pas de limite au point* x_0.



Exemple

Considérons la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *avec* $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ *et montrons qu'elle n'admet pas de limite en 0.*



Exemple

Considérons la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *avec* $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ *et montrons qu'elle n'admet pas de limite en 0.*

- *Par l'absurde, supposons que* $\lim_{x \to 0} f(x) = \ell$



Exemple

Considérons la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *avec* $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ *et montrons qu'elle n'admet pas de limite en 0.*

- *Par l'absurde, supposons que* $\lim_{x \to 0} f(x) = \ell$
- *Introduisons les deux suites* $(u_n) = (\frac{1}{n\pi})$ *et* $(v_n) = (1/(2n\pi + \frac{\pi}{2})$

Exemple

Considérons la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *avec* $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ *et montrons qu'elle n'admet pas de limite en 0.*

- *Par l'absurde, supposons que* $\lim_{x\to 0} f(x) = \ell$
- *Introduisons les deux suites* $(u_n) = (\frac{1}{n\pi})$ *et* $(v_n) = (1/(2n\pi + \frac{\pi}{2})$
- *On calcule* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ *et* $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$



Exemple

Considérons la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *avec* $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ *et montrons qu'elle n'admet pas de limite en 0.*

- *Par l'absurde, supposons que* $\lim_{x \to 0} f(x) = \ell$
- *Introduisons les deux suites* $(u_n) = (\frac{1}{n\pi})$ *et* $(v_n) = (1/(2n\pi + \frac{\pi}{2})$
- *On calcule* $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ *et* $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$
- $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \sin(n\pi) = 0$



Exemple

Considérons la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *avec* $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ *et montrons qu'elle n'admet pas de limite en 0.*

- *Par l'absurde, supposons que* $\lim_{x \to 0} f(x) = \ell$
- *Introduisons les deux suites* $(u_n) = (\frac{1}{n\pi})$ *et* $(v_n) = (1/(2n\pi + \frac{\pi}{2})$
- *On calcule* $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ *et* $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$
- $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \sin(n\pi) = 0$
- $\lim_{n \to +\infty} f(v_n) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1.$



Exemple

Considérons la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *avec* $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ *et montrons qu'elle n'admet pas de limite en 0.*

- *Par l'absurde, supposons que* $\lim_{x\to 0} f(x) = \ell$
- *Introduisons les deux suites* $(u_n) = (\frac{1}{n\pi})$ *et* $(v_n) = (1/(2n\pi + \frac{\pi}{2})$
- *On calcule* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ *et* $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \sin(n\pi) = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} f(v_n) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1.$
- *et on aurait* $0 = 1$ *ce qui est faux.*



Théorème

f continue en x_0 si et seulement si pour toute suite (u_n) qui converge vers x_0 la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(x_0)$

Dérivée d'une fonction

Dérivée d'une fonction

- Généralités

Dérivée d'une fonction

- Généralités
- Théorème de Rolle

Dérivée d'une fonction

- Généralités
- Théorème de Rolle
- Théorème des accroissements finis (T.A.F)

Dérivée d'une fonction

- Généralités
- Théorème de Rolle
- Théorème des accroissements finis (T.A.F)
- Règle de l'hôpital

Dérivée en un point

Définition

Soit I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction. Soit* $x_0 \in I$

Dérivée en un point

Définition

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$

- *f est dérivable en x_0 si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0*

Dérivée en un point

Définition

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$

- *f est dérivable en x_0 si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0*
- *Cette limite s'appelle la dérivée de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$*

Dérivée en un point

Définition

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$

- *f est dérivable en x_0 si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0*
- *Cette limite s'appelle la dérivée de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



Interprétation géométrique

- La tangente au point $(x_0, f(x_0))$ est la droite d'équation $y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$



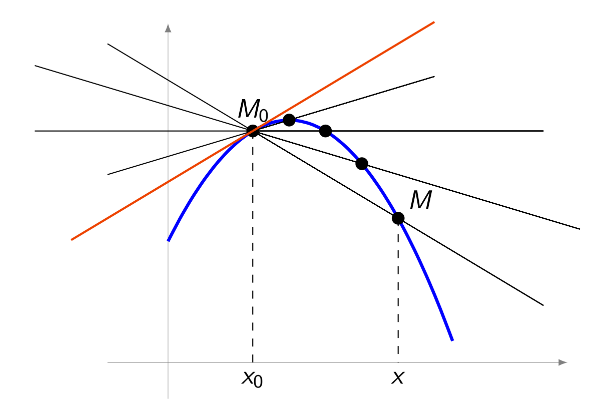
Interprétation géométrique

- La tangente au point $(x_0, f(x_0))$ est la droite d'équation $y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$
- La droite passant par $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$ a pour coefficient directeur $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$



Interprétation géométrique

- La tangente au point $(x_0, f(x_0))$ est la droite d'équation $y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$
- La droite passant par $(x_0, f(x_0))$ et $(x, f(x))$ a pour coefficient directeur $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- Lorsque $(x, f(x))$ tend vers $(x_0, f(x_0))$, cette droite tend vers la tangente au point $(x_0, f(x_0))$.


M_0
M
x_0
x

Dérivée à droite

Définition

Soient $x_0 \in I$, $f \in \mathbb{R}^I$.

1. *On dit que* f *est dérivable à droite en* x_0 *si et seulement si*

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie. Cette limite est alors notée $f'_d(x_0)$ *et appelée dérivée de* f *à droite en* x_0.



Dérivée à gauche

Définition

Soient $x_0 \in I$, $f \in \mathbb{R}^I$.

1. *On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si et seulement si*

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie. Cette limite est alors notée $f'_g(x_0)$ et appelée dérivée de f à gauche en x_0.



Proposition

Soient $x_0 \in I$, $f \in \mathbb{R}^I$. *Pour que* f *soit dérivable en* x_0 *il faut et il suffit que*

1. f *soit dérivable à gauche et à droite en* x_0
2. $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$



Dérivabilité sur un intervalle

Définition

- *f est dérivable sur $]a,b[$ si f est dérivable en tout point $x_0 \in]a,b[$.*
- *f est dérivable sur $[a,b]$ si f est dérivable en tout point $x_0 \in]a,b[$ et dérivable à droite en a et à gauche en b .*
- *$f :]a,b[\mapsto \mathbb{R}$ $x \mapsto f'(x)$ est la fonction dérivée de f sur $]a,b[$*



Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions dérivables sur* I. *Pour tout* $x \in I$ *:*

Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions dérivables sur* I. *Pour tout* $x \in I$:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions dérivables sur* I. *Pour tout* $x \in I$ *:*

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ *où* λ *est un réel fixé*



Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions dérivables sur* I. *Pour tout* $x \in I$:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ *où* λ *est un réel fixé*
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$



Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Pour tout $x \in I$:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ *où λ est un réel fixé*
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ *(si $f(x) \neq 0$)*



Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Pour tout $x \in I$:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ *où λ est un réel fixé*
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ *(si $f(x) \neq 0$)*
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ *(si $g(x) \neq 0$)*



Dérivée d'une composée de fonctions)

Proposition

Si f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x



Dérivée d'une composée de fonctions)

Proposition

Si f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$



Dérivée d'une composée de fonctions)

Proposition

Si f *est dérivable en* x *et* g *est dérivable en* $f(x)$ *alors* $g \circ f$ *est dérivable en* x $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Exemple

Calculons la dérivée de $\ln(1 + x^2)$



Dérivée d'une composée de fonctions)

Proposition

Si f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Exemple

Calculons la dérivée de $\ln(1 + x^2)$

- $f(x) = 1 + x^2$ *avec* $f'(x) = 2x$



Dérivée d'une composée de fonctions)

Proposition

Si f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Exemple

Calculons la dérivée de $\ln(1 + x^2)$

- $f(x) = 1 + x^2$ *avec* $f'(x) = 2x$
- $g(x) = \ln(x)$ *avec* $g'(x) = \frac{1}{x}$

Dérivée d'une composée de fonctions)

Proposition

Si f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Exemple

Calculons la dérivée de $\ln(1 + x^2)$

- $f(x) = 1 + x^2$ *avec* $f'(x) = 2x$
- $g(x) = \ln(x)$ *avec* $g'(x) = \frac{1}{x}$
- $\ln(1 + x^2) = g \circ f(x)$

Dérivée d'une composée de fonctions)

Proposition

Si f est dérivable en x et g est dérivable en f(x) alors $g \circ f$ est dérivable en x $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Exemple

Calculons la dérivée de $\ln(1+x^2)$

- $f(x) = 1 + x^2$ *avec* $f'(x) = 2x$
- $g(x) = \ln(x)$ *avec* $g'(x) = \frac{1}{x}$
- $\ln(1+x^2) = g \circ f(x)$
- $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$



Dérivée d'une composée de fonctions)

Proposition

Si f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Exemple

Calculons la dérivée de $\ln(1 + x^2)$

- $f(x) = 1 + x^2$ *avec* $f'(x) = 2x$
- $g(x) = \ln(x)$ *avec* $g'(x) = \frac{1}{x}$
- $\ln(1 + x^2) = g \circ f(x)$
- $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = g'(1 + x^2) \cdot 2x$



Dérivée d'une composée de fonctions)

Proposition

Si f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Exemple

Calculons la dérivée de $\ln(1+x^2)$

- $f(x) = 1 + x^2$ *avec* $f'(x) = 2x$
- $g(x) = \ln(x)$ *avec* $g'(x) = \frac{1}{x}$
- $\ln(1+x^2) = g \circ f(x)$
- $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = g'(1+x^2) \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}$

Dérivée de la réciproque

Soit I un intervalle ouvert. Soit $f : I \to J$ dérivable et bijective $f^{-1} : J \to I$ sa bijection réciproque.

Dérivée de la réciproque

Soit I un intervalle ouvert. Soit $f : I \to J$ dérivable et bijective $f^{-1} : J \to I$ sa bijection réciproque.

Corollaire

Si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable Pour tout $x \in J$ $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$

Dérivées successives

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable



Dérivées successives

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable
- Si $f' : I \to \mathbb{R}$ est dérivable on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde

Dérivées successives

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable
- Si $f' : I \to \mathbb{R}$ est dérivable on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde
- $f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f''$ et $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$

Dérivées successives

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable
- Si $f' : I \to \mathbb{R}$ est dérivable on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde
- $f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f''$ et $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$
- Si la dérivée n-ième $f^{(n)}$ existe on dit que f est n fois dérivable

Formule de Leibniz

Théorème (Formule de Leibniz)

$$(f \cdot g)^{(n)} =$$
$$f^{(n)} \cdot g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} \cdot g^{(1)} + \cdots \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)} \cdots + f \cdot g^{(n)}$$

Formule de Leibniz

Théorème (Formule de Leibniz)

$$(f\cdot g)^{(n)} = f^{(n)}\cdot g + \binom{n}{1} f^{(n-1)}\cdot g^{(1)} + \cdots \binom{n}{k} f^{(n-k)}\cdot g^{(k)} \cdots + f\cdot g^{(n)}$$

$$(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}$$



Formule de Leibniz

Théorème (Formule de Leibniz)

$$(f \cdot g)^{(n)} =$$
$$f^{(n)} \cdot g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} \cdot g^{(1)} + \cdots \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)} \cdots + f \cdot g^{(n)}$$

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$$

- $n = 1 \quad (f \cdot g)' = f'g + fg'$



Formule de Leibniz

Théorème (Formule de Leibniz)

$$(f \cdot g)^{(n)} =$$
$$f^{(n)} \cdot g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} \cdot g^{(1)} + \cdots \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)} \cdots + f \cdot g^{(n)}$$

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$$

- $n = 1 \quad (f \cdot g)' = f'g + fg'$
- $n = 2 \quad (f \cdot g)'' = f''g + 2f'g' + fg''$



Exemple (Dérivées de $\exp(x) \cdot (x^2 + 1)$)

- $f(x) = \exp x \quad f'(x) = \exp x \quad f''(x) = \exp x$
  $f^{(k)}(x) = \exp x$

Exemple (Dérivées de $\exp(x) \cdot (x^2 + 1)$)

- $f(x) = \exp x \quad f'(x) = \exp x \quad f''(x) = \exp x$
  $f^{(k)}(x) = \exp x$
- $g(x) = x^2 + 1 \quad g'(x) = 2x \quad g''(x) = 2$
  $g^{(k)}(x) = 0 \ (k \geq 3)$

Exemple (Dérivées de $\exp(x) \cdot (x^2+1)$)

- $f(x) = \exp x \quad f'(x) = \exp x \quad f''(x) = \exp x$
  $f^{(k)}(x) = \exp x$
- $g(x) = x^2 + 1 \quad g'(x) = 2x \quad g''(x) = 2$
  $g^{(k)}(x) = 0 \; (k \geq 3)$
- *Formule de Leibniz*
  $(f \cdot g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) \cdot g(x) + \binom{n}{1} f^{(n-1)}(x) \cdot g^{(1)}(x) + \binom{n}{2} f^{(n-2)}(x) \cdot g^{(2)}(x) + \binom{n}{3} f^{(n-3)}(x) \cdot g^{(3)}(x) + \cdots$

Exemple (Dérivées de $\exp(x) \cdot (x^2+1)$)

- $f(x) = \exp x \quad f'(x) = \exp x \quad f''(x) = \exp x$
  $f^{(k)}(x) = \exp x$
- $g(x) = x^2 + 1 \quad g'(x) = 2x \quad g''(x) = 2$
  $g^{(k)}(x) = 0 \; (k \geq 3)$
- *Formule de Leibniz*
  $(f \cdot g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) \cdot g(x) + \binom{n}{1} f^{(n-1)}(x) \cdot g^{(1)}(x) + \binom{n}{2} f^{(n-2)}(x) \cdot g^{(2)}(x) + \binom{n}{3} f^{(n-3)}(x) \cdot g^{(3)}(x) + \cdots$
- $(f \cdot g)^{(n)}(x) =$
  $\exp(x) \cdot (x^2+1) + \binom{n}{1} \exp(x) \cdot 2x + \binom{n}{2} \exp(x) \cdot 2$

Exemple (Dérivées de $\exp(x)\cdot(x^2+1)$)

- $f(x)=\exp x \quad f'(x)=\exp x \quad f''(x)=\exp x$
  $f^{(k)}(x)=\exp x$
- $g(x)=x^2+1 \quad g'(x)=2x \quad g''(x)=2$
  $g^{(k)}(x)=0$ *($k\geq 3$)*
- *Formule de Leibniz*
  $(f\cdot g)^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)\cdot g(x)+\binom{n}{1}\ f^{(n-1)}(x)\cdot g^{(1)}(x)+\binom{n}{2}\ f^{(n-2)}(x)\cdot g^{(2)}(x)+\binom{n}{3}\ f^{(n-3)}(x)\cdot g^{(3)}(x)+\cdots$
- $(f\cdot g)^{(n)}(x)=$
  $\exp(x)\cdot(x^2+1)+\binom{n}{1}\ \exp(x)\cdot 2x+\binom{n}{2}\ \exp(x)\cdot 2$
- $(f\cdot g)^{(n)}(x)=\exp(x)\cdot\left(x^2+2nx+\frac{n(n-1)}{2}+1\right)$